Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du Bac Général Maths + LLCER, veuillez visiter :
bac-maths-llcer.fr/annales-sujets-et-corriges

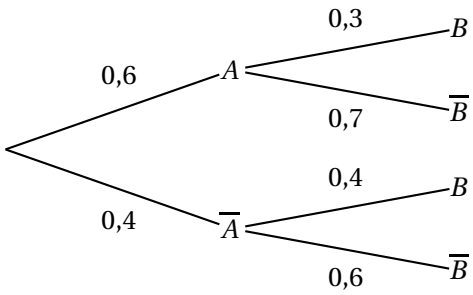
Baccalauréat Métropole 18 juin 2025

Sujet 2

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1 **5 points**

1. Voici l'arbre des probabilités pondéré par les éléments de l'énoncé :



2. On sait que $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = P\left(\overline{A}\right) \times P_{\overline{A}}\left(\overline{B}\right) = 0,4 \times 0,6 = 0,24$.

La probabilité qu'une personne ne chute pas lors des deux premières séances est égale à 0,24.

3. $\left\{A\,;\,\overline{A}\right\}$ est un système complet d'évènements, donc d'après la formule des probabilités totales :

$P(B) = P(A \cap B) + P\left(\overline{A} \cap B\right) = P(A) \times P_A(B) + P\left(\overline{A}\right) \times P_{\overline{A}}(B)$, soit

$P(B) = 0,6 \times 0,3 + 0,4 \times 0,4 = 0,18 + 0,16 = 0,34$.

4. D'après la formule de la probabilité conditionnelle :

$P_{\overline{B}}(\overline{A}) = \dfrac{P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)}{P\left(\overline{B}\right)} = \dfrac{P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)}{1 - P(B)} = \dfrac{0,24}{1 - 0,34} = \dfrac{0,24}{0,66} = \dfrac{24}{66} = \dfrac{4}{11}$ ou encore :

$P_{\overline{B}}\left(\overline{A}\right) \approx 0,3636$, soit 0,364 au millième près.

5. **a.** On répète 100 fois de façon identique et indépendante l'expérience de Bernoulli dont la probabilité de succès (ne pas avoir chuté lors des deux premières séances) est égale à 0,24.

La variable aléatoire X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,24$.

b. On a $P(X \geqslant 20) = 1 - P(X < 20) = 1 - P(X \leqslant 19)$ soit d'après la calculatrice

$\approx 1 - 0,145$, d'où

$P(X \geqslant 20) \approx 0,855$ au millième près.

c. On sait qu'alors $E(X) = n \times p = 100 \times 0,24 = 24$.

Ceci signifie qu'en moyenne sur 100 personnes, 24 ne chuteront lors des deux premières séances.

Partie B

1. Puisque $T = T_1 + T_2$, par linéarité de l'espérance :

$E(T) = E(T_1 + T_2) = E(T_1) + E(T_2) = 40 + 60 = 100$.

Il faut donc attendre en moyenne 100 minutes sur les deux jours.

Les variables aléatoires T_1 et T_2 étant indépendantes on a de même :

$V(T) = V(T_1 + T_2) = V(T_1) + V(T_2)$

Comme $V(T_1) = \sigma(T_1)^2 = 10^2 = 100$ et que $V(T_2) = \sigma(T_2)^2 = 16^2 = 256$, on a donc

$V(T) = 100 + 256 = 356$.

2. Soit $60 < T < 140$ soit en centrant sur l'espérance :

$60 - 100 < T - 100 < 140 - 100 \iff -40 < T - 100 < 40 \iff |T - 100| < 40$ ou encore $|T - E(T)| < 40$.

D'après l'inégalité de Bienaimé-Tchebychev :

$P(|T - E(T)| \geqslant 40) \leqslant \dfrac{V(T)}{40^2} \iff P(|T - E(T)| \geqslant 40) \leqslant \dfrac{V(T)}{40^2} \iff$

$P(|T - E(T)| < 40) \geqslant 1 - \dfrac{356}{1\,600} \iff P(|T - E(T)| < 40) \geqslant \dfrac{1\,244}{1\,600}$.

Comme $\dfrac{1\,244}{1\,600} \approx 0{,}777\,5$ qui est supérieur à 0,77, on a finalement :

$$P(60 < T < 140) > 0{,}77.$$

EXERCICE 2 **5 points**

Partie A

1. Les droites sont sécantes s'il existe un point dont les coordonnées vérifient les équations paramétriques des deux droites, donc s'il existe deux réels t et s donnant les mêmes coordonnées avec les deux systèmes d'équations, soit :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& \frac{3}{2} + 2t = s \\ y &=& 2 + t = \frac{3}{2} + s \\ z &=& 3 - t = 3 - 2s \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \frac{3}{2} + 2t &=& s \\ 2 + t &=& \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + 2t \\ 3 - t &=& 3 - 2(\frac{3}{2} + 2t) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \frac{3}{2} + 2t &=& s \\ 2 + t &=& 3 + 2t \\ 3 - t &=& -4t \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} \frac{3}{2} + 2t &=& s \\ -1 &=& t \\ 3t &=& -3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} -\frac{1}{2} &=& s \\ -1 &=& t \\ t &=& -1 \end{array}\right.$$

Ces équations sont compatibles : les équations paramétriques de d et de (d') donnent respectivement avec $t = -1$ et $s = -\frac{1}{2}$ les mêmes coordonnées $\left(-\frac{1}{2}\,;\,1\,;\,4\right)$ du point commun à ces deux droites.

2. **a.** On a $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires : leurs premières coordonnées sont égales mais pas les autres

Or $\vec{n} \cdot \overrightarrow{\text{AB}} = 2 - 6 + 4 = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{\text{AC}} = 2 - 2 + 0 = 0$.

Conclusion $\vec{n}$ orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) est un vecteur normal à ce plan.

b. Le résultat précédent montre que :
$M(x\,;\,y\,;\,z) \in$ (ABC) $\iff 1x+2y+4z+d=0$, $d \in \mathbb{R}$.
En particulier C$(1\,;\,1\,;\,1) \in$ (ABC) $\iff 1+2+4+d=0$, $d \in \mathbb{R} \iff d=-7$.
Finalement : $M(x\,;\,y\,;\,z) \in$ (ABC) $\iff x+2y+4z-7=0$.

3. A, B et C définissant un plan, il suffit de montrer que S n'appartient pas à ce plan :
$\text{S}\left(-\frac{1}{2}\,;\,1\,;\,4\right) \notin$ (ABC) $\iff -\dfrac{1}{2}+2+16-7 \neq 0 \iff \dfrac{21}{2} \neq 0$ qui est bien vraie.

4. **a.** Si H est le projeté orthogonal de S sur le plan (ABC), alors $\overrightarrow{\text{SH}}$ est un vecteur normal au plan (ABC), donc colinéaire au vecteur $\vec{n}$.
Or $\overrightarrow{\text{SH}}\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.
Avec $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, on a bien $\vec{n} = -2\overrightarrow{\text{SH}}$.
D'autre part on a ;
H$(-1\,;\,0\,;\,2) \in$ (ABC) $\iff -1+2\times 0+4\times 2-7=0$ qui est vraie.
Conclusion : le point H$(-1\,;\,0\,;\,2)$ est le projeté orthogonal de S sur le plan (ABC).

b. De $\overrightarrow{\text{SH}}\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ on en déduit que $\text{SH}^2 = \dfrac{1}{4}+1+4 = \dfrac{1}{4}+\dfrac{20}{4} = \dfrac{21}{4}$, d'où $\text{SH} = \sqrt{\dfrac{21}{4}} = \dfrac{\sqrt{21}}{\sqrt{4}} = \dfrac{\sqrt{21}}{2}$.
Comme H est le projeté orthogonal de S sur le plan (ABC) on sait que la distance SH est la plus petite distance de S au plan. Pour tout autre point M distinct de H du plan (ABC), [SM] est l'hypoténuse du triangle rectangle SHM donc le côté le plus long de ce triangle et en particulier SM > SH, soit SM $> \dfrac{\sqrt{21}}{2}$.

Partie B

1. Si $M(x\,;\,y\,;\,z)$, avec $\overrightarrow{\text{CS}}\begin{pmatrix} -\dfrac{3}{2} \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, on a

$$\overrightarrow{\text{C}M} = k\overrightarrow{\text{CS}} \iff \begin{cases} x-1 &= -\dfrac{3}{2}k \\ y-1 &= 0k \\ z-1 &= 3k \end{cases} \iff \begin{cases} x &= 1-\dfrac{3}{2}k \\ y &= 1 \\ z &= 1+3k \end{cases}$$

2. (MAB) est rectangle en M si :
(AM) et (BM) sont perpendiculaires soit si $\overrightarrow{\text{A}M}\cdot\overrightarrow{\text{B}M} = 0$.
Avec $\overrightarrow{\text{A}M}\begin{pmatrix} 1-\dfrac{3}{2}k+1 \\ 1-2 \\ 1+3k-1 \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{\text{A}M}\begin{pmatrix} 2-\dfrac{3}{2}k \\ -1 \\ 3k \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{B}M}\begin{pmatrix} 1-\dfrac{3}{2}k-1 \\ 1+1 \\ 1+3k-2 \end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{\text{B}M}\begin{pmatrix} -\dfrac{3}{2}k \\ 2 \\ 3k-1 \end{pmatrix}$ le produit scalaire s'écrit :

$-\dfrac{3}{2}k\left(2-\dfrac{3}{2}k\right)-2+3k(3k-1)=0 \iff -3k+\dfrac{9}{4}k^2-2+9k^2-3k=0 \iff$

$9k^2+36k^2-24k-8=0 \iff 45k^2-24k-8=0.$

Pour cette équation du second degré, on a

$\Delta = 24^2-4\times 45\times(-8)=2016>0.$

L'équation a deux solutions :

$k_1=\dfrac{24+\sqrt{2016}}{90}\approx 0,765$ et $k_2=\dfrac{24-\sqrt{2016}}{90}\approx -0,232.$

Seul $k_1\in[0\,;\,1]$.

Conclusion : il existe un seul point M_1 du segment [CS] tel que M_1AB est un triangle rectangle en M_1.

Rem. Si on remplace k par la valeur trouvée ci-dessus, on trouve que $AB^2=14$,

$AM_1^2=7$ et $BM_1^2=7$.

Le triangle M_1AB est un triangle rectangle ($7+7=14$), mais il est aussi isocèle.

EXERCICE 3 **5 points**

1. La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par

$$u_n=\frac{1+5^n}{2+3^n}.$$

Affirmation 1 : La suite (u_n) converge vers $\dfrac{5}{3}$. FAUSSE

En écrivant $u_n=\dfrac{1+5^n}{2+3^n}=\dfrac{\frac{1}{5^n}+1}{\frac{2}{5^n}+\left(\frac{3}{5}\right)^n}$ et en remarquant que :

- $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{5^n}=0$;
- $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2}{5^n}=0$;
- $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3}{5}\right)^n=0$ car $0<\dfrac{3}{5}<1$;

Donc par somme de limites, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{5^n}+1=1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2}{5^n}+\left(\dfrac{3}{5}\right)^n=0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.

2. On considère la suite (w_n) définie par :

$$w_0=0 \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ w_{n+1}=3w_n-2n+3.$$

Affirmation 2 : Pour tout entier naturel n, $w_n\geqslant n$.

Raisonnement par récurrence :

Initialisation : $w_0=0\geqslant 0$: l'inégalité est vraie au rang 0 ;

Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $w_n\geqslant n$, alors

$3w_n\geqslant 3n \iff 3w_n-2n\geqslant 3n-2n$ ou $3w_n-2n\geqslant n$ et enfin $3w_n-2n+3\geqslant n+3$.

Or $n+3=n+1+2$, donc $n+3>n+1$ et $3w_n-2n+3=w_{n+1}$.

On a donc $w_{n+1} \geqslant n+3 > n+1$, soit par transitivité : $w_{n+1} \geqslant n+1$: l'inégalité est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : l'inégalité est vraie au rang 0 et si elle est vraie à un rang n, elle l'est aussi au rang $n+1$; d'après le principe de récurrence pour tout entier naturel n, $w_n \geqslant n$: l'affirmation 2 est vraie.

3. L'affirmation est fausse car si f était convexe sur $]0\,;\,+\infty[$, elle le serait au point d'abscisse 8 et sa courbe représentative serait au dessus de sa tangente au point A. C'est le contraire d'après le graphique : Affirmation 3 : fausse.

4. Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \ln(x) - x + 1$.

Comme somme de fonctions dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$, f est dérivable sur cet =intervalle et $f'(x) = \dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{1-x}{x}$.

On a de façon immédiate :

• $f'(x) = 0 \iff x = 1$;

• $f'(x) > 0 \iff x < 1$, donc sur $]0;\,1[$, f est croissante de moins l'infini à $f(1) = \ln 1 - 1 + 1 = 0$.

• $f'(x) < 0 \iff x > 1$, donc f est décroissante sur $]1\,;\,+\infty[$ de 0 à moins l'infini.

Donc cette fonction est négative puisque son maximum est 0 en $x = 1$: l'affirmation 4 est vraie.

EXERCICE 4 — 5 points

Partie A

1. Graphiquement on lit que $f(2) = 15$: le chariot a parcouru 15 m en 2 secondes.

2. L'équation d Δ a une équation $y = k$, avec $k < 23$.

Une zone de 23 m de longueur semble suffisante.

3. La tangente en A contient les points de coordonnées $(0\,;\,16{,}5)$ et $(4{,}7\,;\,21)$. Son coefficient directeur est donc égal à : $\dfrac{21-16{,}5}{4{,}7-0} = \dfrac{4{,}5}{4{,}7} \approx 0{,}96$.

Partie B

1. **a.** On considère l'équation différentielle

$$(E') : \quad y' + 0{,}6y = 0.$$

On sait que les solutions de cette équation (homogène) sont les fonctions définies sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$t \longmapsto f(t) = K\mathrm{e}^{-0{,}6t}, \quad \text{avec } K \in \mathbb{R}.$$

b. Si g la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(t) = t\mathrm{e}^{-0{,}6t}$, alors
$g'(t) = \mathrm{e}^{-0{,}6t} - 0{,}6t\mathrm{e}^{-0{,}6t} = \mathrm{e}^{-0{,}6t}(1-0{,}6t)$.
Calculons $g'(t) + 0{,}6g(t) = \mathrm{e}^{-0{,}6t}(1-0{,}6t) + 0{,}6 \times t\mathrm{e}^{-0{,}6t} = \mathrm{e}^{-0{,}6t}(1-0{,}6t+0{,}6t) = \mathrm{e}^{-0{,}6t} \times 1 = \mathrm{e}^{-0{,}6t}$.
Comme $g'(t) + 0{,}6g(t) = \mathrm{e}^{-0{,}6t}$, g est bien une solution particulière de l'équation (E).

c. On sait qu'alors les solutions de l'équation (E) sont les fonctions f définies sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$t \longmapsto f(t) = te^{-0,6t} + Ke^{-0,6t} = e^{-0,6t}(t+K), \quad \text{avec } K \in \mathbb{R}.$$

d. En particulier la fonction v, est de cette forme :
$v(t) = e^{-0,6t}(t+K)$ et vérifie $v(0) = 12$.
Or $v(0) = e^{-0,6\times 0}(0+K) = 12 \iff 0+K = 12 \iff K = 12$.
Conclusion : $v(t) = (12+t)e^{-0,6t}$.

2. **a.** Puisque v est une solution de (E), elle vérifie donc $v'(t) + 0,6v(t) = e^{-0,6t} \iff v'(t) = e^{-0,6t} - 0,6v(t) \iff v'(t) = e^{-0,6t} - 0,6(12+t)e^{-0,6t} \iff v'(t) = e^{-0,6t}(1 - 7,2 - 0,6t) = e^{-0,6t}(-6,2 - 0,6t)$.

b. Avec l'écriture $v(t) = 12e^{-0,6t} + \dfrac{1}{0,6} \times \dfrac{0,6t}{e^{0,6t}}$, on a :

- $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-0,6t} = 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} 12e^{-0,6t} = 0$;
- $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{0,6t}{e^{0,6t}} = 0$ (puissances comparées au voisinage de plus l'infini) et ensuite $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{1}{0,6}\dfrac{0,6t}{e^{0,6t}} = 0$.

Finalement par somme de limites : $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t) = 0$ (ce qui est rassurant : le chariot va s'arrêter).

c. Puisque $v'(t) = e^{-0,6t}(-6,2 - 0,6t)$ et comme $e^{-0,6t} > 0$ quel que soit $t \in \mathbb{R}$, le signe de $v'(t)$ est celui de $(-6,2 - 0,6t)$.

- $-6,2 - 0,6t > 0 \iff -6,2 > 0,6t \iff -62 > 6t \iff -\dfrac{62}{6} > t \iff t < \dfrac{62}{6}$ soit enfin $t < \dfrac{31}{3}$; v est donc croissante sur $\left[-\infty\,;\,-\dfrac{31}{3}\right[$; dans le cadre de l'exercice puisque $t \geqslant 0$ ceci ne peut arriver, donc
- $-6,2 - 0,6t < 0 \iff t > -\dfrac{62}{6}$, soit en fait pour $t \geqslant 0$, donc v est décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$ de 12 à 0.

d. D'où le tableau de variation suivant :

x	0		α		$+\infty$
$v'(t)$		$-$			
v	12	↘	1	↘	0

Sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, la fonction v continue, car dérivable est strictement décroissante de 12 à 0 ; comme $1 \in]0\,;\,12]$, il existe d'après le théorème des valeurs intermédiaires un réel unique $\alpha \in]0\,;\,+\infty[$ tel que $v(\alpha) = 1$.

La calculatrice montre que :

$v(4) \approx 1,5$ et $v(5) \approx 0,85$, donc $4 < \alpha < 5$;

$v(4,6) \approx 1,05$ et $v(4,7) \approx 0,995$, donc $4,6 < \alpha < 4,7$; à 0,1 près on prend $\alpha \approx 4,7$.

3. D'après la question précédente la vitesse descend à 1 m/s au bout de 4,7 s. Le système d'arrêt se déclenchera donc au bout de 4,7 s.

Partie C

1. Calcul de l'intégrale : $d(t) = \int_0^t (12+x)\mathrm{e}^{-0,6x}\,\mathrm{d}x$:

Avec
$\begin{cases} u(x) = 12+x & v'(x) = \mathrm{e}^{-0,6x} \\ u'(x) = 1 & v(x) = -\dfrac{1}{0,6}\mathrm{e}^{-0,6x} \end{cases}$,

et toutes ces fonctions étant continues car dérivables sur $[0\,;\ t]$, on peut intégrer par parties :

Rappel : $\boxed{\int_0^t u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_0^t - \int_0^t u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x}$.

Donc $d(t) = \left[-(12+x)\times\dfrac{1}{0,6}\mathrm{e}^{-0,6x}\right]_0^t - \int_0^t -\dfrac{1}{0,6}\mathrm{e}^{-0,6x}\,\mathrm{d}x$.

Soit $d(t) = \left[-(12+x)\times\dfrac{1}{0,6}\mathrm{e}^{-0,6x}\right]_0^t + \int_0^t \dfrac{1}{0,6}\mathrm{e}^{-0,6x}\,\mathrm{d}x =$

$\left[-(12+x)\times\dfrac{1}{0,6}\mathrm{e}^{-0,6x}\right]_0^t - \dfrac{1}{0,6}\left[\dfrac{1}{0,6}\mathrm{e}^{-0,6x}\right]_0^t = \left[-(12+x)\times\dfrac{1}{0,6}\mathrm{e}^{-0,6x} - \dfrac{1}{0,36}\mathrm{e}^{-0,6x}\right]_0^t$.

Or $\dfrac{1}{0,6} = \dfrac{10}{6} = \dfrac{5}{3}$ et $\dfrac{1}{0,36} = \dfrac{100}{36} = \dfrac{4\times25}{4\times9} = \dfrac{25}{9}$.

Soit $d(t) = \left[-(12+x)\times\dfrac{5}{3}\mathrm{e}^{-0,6x}\right]_0^t - \left[\dfrac{25}{9}\mathrm{e}^{-0,6x}\right]_0^t = \left[-\mathrm{e}^{-0,6x}\left(\dfrac{5(12+x)}{3} + \dfrac{25}{9}\right)\right]_0^t =$

$-\mathrm{e}^{-0,6t}\left(20 + \dfrac{5t}{3} + \dfrac{25}{9}\right) + 20 + \dfrac{25}{9} = \mathrm{e}^{-0,6t}\left(-\dfrac{5}{3}t - \dfrac{205}{9}\right) + \dfrac{205}{9}$.

2. On a vu que la vitesse du chariot est à peu près égale à 1 m/s au bout de 4,7 s.

La distance parcourue par le chariot au moment du déclenchement de l'arrêt est donc $d(4,7) = \mathrm{e}^{-0,6\times4,7}\left(-\dfrac{5}{3}\times4,7 - \dfrac{205}{9}\right) + \dfrac{205}{9} \approx 20,95$ (m) au centimètre près.

Le dispositif s'arrêt se déclenche quand le chariot a parcouru environ 20,95 m.

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.