Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du Bac Général Maths + LLCER, veuillez visiter :
bac-maths-llcer.fr/annales-sujets-et-corriges

Baccalauréat Amérique du Nord – 20 mai 2026

Sujet 1

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

A. P. M. E. P.

EXERCICE 1 — 6 points

Partie A

1. Le complément de l'arbre : on a au premier niveau :

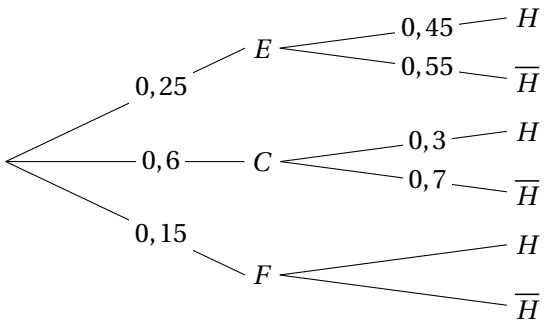
$P(E) = \dfrac{25}{100} = 0,25$, $P(F) = \dfrac{15}{100} = 0,15$, donc par complément à 1 :

$P(C) = 1 - (0,25 + 0,15) = 1 - 0,4 = 0,6 = \dfrac{60}{100} = 60\,\%$.

Au second niveau :

- On sait que $P_E(H) = 0,45$, d'où $P_E\left(\overline{H}\right) = 1 - 0,45 = 0,55$;
- $P_C(H) = 0,30$ d'où $P_C(H) = 1 - 0,30 = 0,70$;

L'arbre de probabilités complété est :



2. Par définition des probabilités conditionnelles :

$P(E \cap H) = P(E) \times P_E(H) = 0,25 \times 0,45 = 0,112\,5$.

3. Les évènements E, C et F forment une partition de l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales :

$P(H) = P\big(E \cap H\big) + P\big(C \cap H\big) + P\big(F \cap H\big)$

D'où : $P(H) = 0,112\,5 + P(C) \times P_C(H) + P\big(F \cap H\big)$

$= 0,112\,5 + 0,6 \times 0,3 + 0,12$

$= 0,112\,5 + 0,18 + 0,12$

$= 0,412\,5$

La probabilité qu'un abonné ait activé l'option « Écoute hors-ligne » est bien de 0,412 5.

4. Trouver la probabilité qu'un abonné ayant activé l'option « Écoute hors-ligne » ait choisi l'abonnement « Étudiant » revient à calculer la probabilité $P_H(E)$.

$P_H(E) = \dfrac{P\big(H \cap E\big)}{P(H)} = \dfrac{0,112\,5}{0,412\,5} = \dfrac{3}{11} \approx 0,273$ à 10^{-3} près.

La probabilité qu'un abonné ayant activé l'option « Écoute hors-ligne » ait choisi l'abonnement « Étudiant » est égale à 0,273 arrondi au millième.

Partie B

1. On choisit huit abonnés de cette plateforme, au hasard et on considère qu'il y a suffisamment d'abonnés pour que ce choix soit assimilé à un tirage avec remise, c'est-à-dire à huit répétitions identiques et indépendantes.

La probabilité du succès (un abonné ait activé l'option « Écoute hors-ligne ») est égale à 0,412 5.

Donc la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 8$ et $p = 0{,}412\,5$.

Remarque : ici, on a une rédaction plus légère, car l'énoncé demande d'admettre que X suit une loi binomiale. Sinon, il faudrait les trois arguments classiques :

- On a une épreuve à deux issues, succès de probabilité $p = 0{,}412\,5$ et échec ;
- cette épreuve est répétée $n = 8$ fois, de façon identique et indépendante (car la constitution de l'échantillon est assimilé à un tirage au sort **avec** remise) ;
- X est la variable aléatoire qui compte le nombre de succès sur ces n répétitions.

2. Calculer la probabilité qu'aucun de ces huit abonnés n'ait activé l'option « Écoute hors-ligne » revient à calculer la probabilité $P(X = 0)$.

$P(X = 0) = \binom{8}{0} \times 0{,}412\,5^0 \times (1 - 0{,}412\,5)^{8-0} = 0{,}587\,5^8 \approx 0{,}014$ à 10^{-3} près.

La probabilité qu'aucun de ces huit abonnés n'ait activé l'option « Écoute hors-ligne » est de 0,014 arrondi au millième.

3. a. Pour tout entier naturel non nul n, soit X_n la variable aléatoire donnant le nombre d'abonnés ayant activé l'option « Écoute hors-ligne ».

La variable aléatoire X_n suit donc une loi binomiale de paramètres n et 0,412 5.

$q_n = P(X_n \geqslant 1) = 1 - P(X_n = 0) = 1 - \binom{n}{0} \times 0{,}412\,5^0 \times (1 - 0{,}412\,5)^{n-0} = 1 - 0{,}587\,5^n$.

Pour tout n entier naturel non nul, on a bien $q_n = 1 - 0{,}587\,5^n$.

b. Déterminer la plus petite valeur de n telle que la probabilité qu'au moins un abonné de l'échantillon ait activé l'option « Écoute hors-ligne » soit supérieure ou égale à 99,9 % revient à déterminer le plus petit entier naturel n tel que $q_n \geqslant 0{,}999$.

$$\begin{aligned}
q_n \geqslant 0{,}999 &\iff 1 - 0{,}587\,5^n \geqslant 0{,}999 \\
&\iff 0{,}001 \geqslant 0{,}587\,5^n \\
&\iff \ln(0{,}001) \geqslant \ln(0{,}587\,5^n) \quad \text{car la fonction logarithme népérien est croissante sur }]0\,;\,+\infty[\\
&\iff \ln(0{,}001) \geqslant n\ln(0{,}587\,5) \quad \text{par propriété de la fonction ln} \\
&\iff \frac{\ln(0{,}001)}{\ln(0{,}587\,5)} \leqslant n \quad \text{car } \ln(0{,}587\,5) < 0
\end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln(0{,}001)}{\ln(0{,}587\,5)} \approx 12{,}987\,5$

La plus petite valeur de n telle que la probabilité qu'au moins un abonné de l'échantillon ait activé l'option « Écoute hors-ligne » soit supérieure ou égale à 99,9 % est donc égale à 13.

Partie C

1. La variable aléatoire Y peut prendre les valeurs :

- 5 € (uniquement l'abonnement « Étudiant »)
- 7 € (uniquement l'abonnement « Étudiant » avec l'option « Écoute hors-ligne »)
- 10 € (uniquement l'abonnement « Classique »)
- 12 € (uniquement l'abonnement « Classique » avec l'option « Écoute hors-ligne »)
- 16 € (uniquement l'abonnement « Famille »)
- 18 € (uniquement l'abonnement « Famille » avec l'option « Écoute hors-ligne »)

2. Il reste à calculer $P\left(F \cap \overline{H}\right)$.

On a $P(F) = P(F \cap H) + P\left(F \cap \overline{H}\right) \iff 0,15 = 0,12 + P\left(F \cap \overline{H}\right) \iff$

$P\left(F \cap \overline{H}\right) = 0,15 - 0,12 = 0,03.$

Le tableau décrivant la loi de probabilité de la variable aléatoire Y est donc :

y_i	5	7	10	12	16	18
évènement $\{Y = y_i\}$	$E \cap \overline{H}$	$E \cap H$	$C \cap \overline{H}$	$C \cap H$	$F \cap \overline{H}$	$F \cap H$
$P(Y = y_i)$	0,1375	0,1125	0,42	0,18	0,03	0,12

3. $E(Y) = \sum_{i=1}^{6} P(Y = y_i) y_i$

$= 5 \times 0,1375 + 7 \times 0,1125 + 10 \times 0,42 + 12 \times 0,18 + 16 \times 0,03 + 18 \times 0,12$

$= 10,475$

Ce qui est le résultat donné.

Sur un très grand nombre d'abonnés, le tarif moyen mensuel sera de 10,475 €.

4. À l'aide de la calculatrice, on trouve : $V(Y) \approx 13,70$ arrondi au centième.

5. **a.** $V(Z) = \left(\sigma(Z)\right)^2 = 2^2 = 4$

La variance de la variable aléatoire Z vaut 4.

b. On cherche la probabilité que le prix de son abonnement soit strictement compris entre 6 et 12 euros soit $P(6 < Z < 12)$

On remarque que l'espérance de Z est 9 €, c'est la valeur au milieu de l'intervalle]6 ; 12[.

On a donc : $P(6 < Z < 12) = P(9 - 3 < Z < 9 + 3)$

$= P(-3 < Z - 9 < 3)$

$= P\left(|Z - 9| < 3\right)$

$= 1 - P(|Z - 9| \geqslant 3)$

Or, pour tout réel $t > 0$, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :

$P\left(|Z - E(Z)| \geqslant t\right) \leqslant \dfrac{V(Z)}{t^2}$

Pour $t = 3$ on obtient : $P\left(|Z - 9| \geqslant 3\right) \leqslant \dfrac{4}{3^2}$.

D'où : $1 - P\left(|Z - 9| \geqslant 3\right) \geqslant 1 - \dfrac{4}{9}$.

Soit : $P(6 < Z < 12) \geqslant \dfrac{5}{9} > \dfrac{4,5}{9} = 0,5$.

Donc le responsable a raison, si on interroge un abonné de cette plateforme vidéo au hasard, il y a au moins 50 % de chances pour que le prix de son abonnement soit strictement compris entre 6 et 12 euros.

EXERCICE 2 — 4 points

Partie A : étude d'un modèle discret

1. $u_1 = 4 - \dfrac{4}{u_0} = 4 - \dfrac{4}{4} = 4 - 1 = 3.$

Le nombre de perches-soleil au 1er janvier 2026 donné par ce modèle sera de 3 000.

2. **a.** La fonction h est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout réel strictement positif x on a :

$h'(x) = 0 - 4 \times \dfrac{-1}{x^2} = \dfrac{4}{x^2} > 0$

Donc h' est une fonction à valeurs strictement positives sur $]0 ; +\infty[$, cela implique que la fonction h est strictement croissante sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

b. On remarque que la fonction h introduite dans la question est la fonction de récurrence de la suite, c'est-à-dire que pour tout entier naturel n, on a : $h(u_n) = u_{n+1}$.

Pour tout entier naturel n, on pose l'affirmation P_n : « $2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 4$. »

Initialisation : pour $n = 0$, on a, d'après la définition de la suite $u_0 = 4$ et d'après la question précédente $u_1 = 3$.

Donc $2 \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant 4$. Donc l'affirmation P_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 0$ et $2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 4$ vraie (c'est l'hypothèse de récurrence P_n)

Par croissance de la fonction h démontrée à la question **2. a.** les images de ces quatre nombres sont rangées dans le même ordre que leurs antécédents, soit

$h(2) \leqslant h(u_{n+1}) \leqslant h(u_n) \leqslant h(4)$.

Or $h(2) = 4 - \dfrac{4}{2} = 4 - 2 = 2$, $h(u_{n+1}) = u_{n+2}$, $h(u_n) = u_{n+1}$ et $h(4) = 4 - \dfrac{4}{4} = 4 - 1 = 3$.

On a donc $2 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$ et comme $3 < 4$, on a finalement

$2 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$: P_{n+1} est vraie.

Conclusion : la relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang $n \geqslant 0$, elle l'est aussi au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 4.$$

c. D'après la question précédente, on a :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $2 \leqslant u_n \leqslant 4$: la suite est minorée par 2 et majorée par 4 ;
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$: la suite est décroissante ;

La suite est donc décroissante et minorée, elle est donc convergente, vers une limite $\ell \geqslant 2$.

d. La suite u est définie par récurrence, sa fonction de récurrence h est continue car dérivable sur $]0 ; +\infty[$, et la suite est convergente. D'après le théorème du point fixe, on en déduit que la limite ℓ de la suite (u_n) doit vérifier l'équation $h(\ell) = \ell \iff 4 - \dfrac{4}{\ell} = \ell$.

En multipliant chaque membre par $\ell \neq 0$, on obtient $\ell^2 = 4\ell - 4 \iff \ell^2 - 4\ell + 4 = 0 \iff (\ell - 2)^2 = 0 \iff \ell - 2 = 0 \iff \ell = 2$.

L'unique solution de l'équation étant 2, on a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$.

e. Ce modèle prévoit une stabilisation de la population à 2 000 perches-soleil, et ne prévoit donc pas une élimination à long terme de l'espèce envahissante.

3. a. Soit s un réel appartenant à l'intervalle $]2 ; 4[$.

Le script qui renvoie, après exécution, le plus petit entier n tel que $u_n < s$ est :

```
def population(s) :
  u = 4
  n = 0
  while u >= s :
    u = 4 - 4/u
    n = n + 1
  return n
```

La variable `u` va stocker la valeur d'un terme de la suite, tandis que la variable `n` va stocker la valeur de l'indice correspondant.

Pour que la boucle `while` s'arrête dès que $u_n < s$, il faut qu'elle continue tant que cette condition n'est pas réalisée, c'est-à-dire tant que `u` contient une valeur qui n'est pas strictement inférieure à s.

Et tant que c'est le cas, les deux instructions à répéter sont : de remplacer la valeur stockée dans `u` par la valeur suivante, en appliquant la relation de récurrence, et donc d'augmenter de 1 la valeur de l'indice stocké dans `n`, pour garder la correspondance.

b. L'algorithme donne :

- $u_9 = 2,2$ et
- $u_{10} \approx 2,182 < 2,2$, donc la commande `population(2.2)` renvoie 10.

La population sera inférieure à 2 200 perches-soleil à partir de 2035 (2025 + 10).

Partie B : étude d'un modèle continu

1. $(E)\quad y' + y = 2\quad$ soit $\quad y' = -y + 2$.

Cette équation différentielle est de la forme $\quad y' = ay + b\quad$ avec $a = -1$ et $b = 2$.

Les solutions de l'équation (E) sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme :

$f(t) = k\mathrm{e}^{-t} - \dfrac{2}{-1} = k\mathrm{e}^{-t} + 2\quad$ avec $k \in \mathbb{R}$.

2. p est solution de l'équation (E) donc il existe un réel k tel que $p(t) = k\mathrm{e}^{-t} + 2$

On sait que $p(0) = 4$ donc : $\quad p(0) = 4 \iff 4 = k\mathrm{e}^0 + 2$

$$\iff 2 = k$$

L'expression de la fonction p sur l'intervalle $[0;+\infty[$ est donc bien : $\quad p(t) = 2\mathrm{e}^{-t} + 2$.

3. Comme $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-t} = 0$, par limite de produit par 2 puis limite de somme $\lim\limits_{t\to+\infty} 2\mathrm{e}^{-t} + 2 = 2$

Donc ce modèle ne prévoit pas non plus une élimination à long terme de l'espèce envahissante, il prévoit une stabilisation à 2 000 perches-soleil. Ce qui est cohérent avec le modèle étudié à la partie **A**.

EXERCICE 3 — 5 points

Partie A

1. Dans le repère $\left(\mathrm{O};\overrightarrow{\mathrm{OI}},\overrightarrow{\mathrm{OJ}},\overrightarrow{\mathrm{OK}}\right)$ on a : $\quad \mathrm{A}(-1\ ;\ -1\ ;\ 0)\quad$ et $\quad \mathrm{D}(1\ ;\ -1\ ;\ 0)$.

2. Étant données les coordonnées de S et C, on a donc :

$$\overrightarrow{\mathrm{SC}}\begin{pmatrix} x_\mathrm{C} - x_\mathrm{S} \\ y_\mathrm{C} - y_\mathrm{S} \\ z_\mathrm{C} - z_\mathrm{S} \end{pmatrix}\quad \text{soit}\quad \overrightarrow{\mathrm{SC}}\begin{pmatrix} 1-0 \\ 1-0 \\ 0-2 \end{pmatrix}\quad \text{finalement :}\quad \overrightarrow{\mathrm{SC}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\quad \text{et de même :}\quad \overrightarrow{\mathrm{SB}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

On est dans un repère orthonormé donc :

$\overrightarrow{\mathrm{SC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{SB}} = 1 \times (-1) + 1 \times 1 + (-2) \times (-2) = -1 + 1 + 4 = 4$.

3. On a $\mathrm{SC} = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}\quad$ et $\quad \mathrm{SB} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$

$\overrightarrow{\mathrm{SC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{SB}} = \mathrm{SC} \times \mathrm{SB} \times \cos\left(\widehat{\mathrm{BSC}}\right) \iff 4 = \sqrt{6} \times \sqrt{6} \times \cos\left(\widehat{\mathrm{BSC}}\right)$

$$\iff \frac{4}{6} = \cos\left(\widehat{\mathrm{BSC}}\right)$$

$$\iff \frac{2}{3} = \cos\left(\widehat{\mathrm{BSC}}\right)$$

D'où $\quad \widehat{\mathrm{BSC}} = \arccos\left(\dfrac{2}{3}\right) \approx 48,1897(\check{\mathrm{r}})\quad$ soit $\quad \widehat{\mathrm{BSC}} \approx 48,2(\check{\mathrm{r}})$, arrondi au dixième de degré près.

Partie B

1. a. Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{SB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{SC}}$ ne sont pas colinéaires. (On peut le justifier par étude des coordonnées des vecteurs, ou parce que l'angle $\widehat{\mathrm{BSC}}$ n'est ni plat ni nul, ou parce que le plan étant nommé (SBC), cela implique que les points S, B et C ne sont pas alignés).

De plus : $\quad \vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{SB}} = 0 \times (-1) + 2 \times 1 + 1 \times (-2) = 0 + 2 - 2 = 0$

et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{\text{SC}} = 0 \times (1) + 2 \times 1 + 1 \times (-2) = 0 + 2 - 2 = 0$

Le vecteur $\vec{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (SBC) donc le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (SBC).

b. Le vecteur $\vec{n}$ étant normal au plan (SBC), une équation cartésienne de ce plan est de la forme : $0x + 2y + z + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$.

$S(0\ ;\ 0\ ;\ 2) \in$ (SBC) donc $0 + 2 \times 0 + 2 + d = 0 \iff d = -2$.

Donc une équation cartésienne du plan (SBC) est $2y + z - 2 = 0$.

2. a. H est le projeté orthogonal du point O sur le plan (SBC) donc la droite (OH) est orthogonale au plan (SBC). Un vecteur normal au plan (SBC) sera donc un vecteur directeur de la droite (OH).

Un vecteur directeur de la droite (OH) est donc le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$.

De plus le point O, de coordonnées (0 ; 0 ; 0) appartient à la droite (OH) donc une représentation de la droite (OH) est : $\begin{cases} x = x_{\text{O}} + x_{\vec{n}}\, t \\ y = y_{\text{O}} + y_{\vec{n}}\, t \\ z = z_{\text{O}} + z_{\vec{n}}\, t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$ soit

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2t \\ z = t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

b. H est le projeté orthogonal de O sur (SBC), alors H = (OH) ∩ (SBC).

Donc H est le point de (OH) dont le paramètre fait que les coordonnées paramétriques vérifient l'équation de (SBC).

On résout donc : $4t + t - 2 = 0 \iff 5t = 2$

$$\iff t = \frac{2}{5}$$

H est donc le point de paramètre $t = \dfrac{2}{5}$ sur (OH),

donc ses coordonnées sont : $\text{H}\left(0\ ;\ \dfrac{4}{5}\ ;\ \dfrac{2}{5}\right)$.

c. La distance OH vaut donc : $\text{OH} = \sqrt{(0-0)^2 + \left(\dfrac{4}{5} - 0\right)^2 + \left(\dfrac{2}{5} - 0\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{4}{25}} = \sqrt{\frac{20}{25}} = \sqrt{\frac{4 \times 5}{5^2}}$$

$$= \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

La distance du point O au plan (SBC), c'est-à-dire la distance de O à son projeté orthogonal sur (SBC), est donc bien égale à $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ (cm).

Partie C

1. a. La base de la pyramide SABCD est le carré ABCD, de côté 2 cm et sa hauteur associé est le segment [SO], de longueur 2 cm.

Donc $V = \dfrac{1}{3} \times 2^2 \times 2 = \dfrac{8}{3}$ (cm^3.

Son volume est donc égal à $\dfrac{8}{3}$ (cm^3).

b. La base de la pyramide OCBS est le triangle OCB et sa hauteur associé est le segment [SO].

L'aire du triangle OCB est égale au quart de l'aire du carré ABCD car O est le centre du carré ABCD.

La hauteur étant la même, le volume de la pyramide OCBS est égal au quart du volume de la pyramide SABCD.

$V' = \dfrac{1}{4}V = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{8}{3} = \dfrac{2}{3}$.

Donc le volume de la pyramide OCBS est bien égal à $\dfrac{2}{3}$ (cm^3).

2. Dans le triangle SBC, on a : $\text{SB} = \text{SC} = \sqrt{6}$ donc SBC est un triangle isocèle en S.

J étant le milieu du segment [BC], le segment [SJ] est la hauteur issue de S dans le triangle SBC.

Le triangle JSB est rectangle en J donc, d'après le théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned}\text{SB}^2 = \text{SJ}^2 + \text{BJ}^2 &\iff \text{SJ}^2 = \text{SB}^2 - \text{BJ}^2\\ &\iff \text{SJ}^2 = \left(\sqrt{6}\right)^2 - 1^2 = 6 - 1 = 5\\ &\iff \text{SJ} = \sqrt{5} \quad \text{car une longueur est positive}\end{aligned}$$

Soit A l'aire du triangle SBC.

On a : $A = \dfrac{\text{longueur de la base} \times \text{hauteur}}{2} = \dfrac{2 \times \sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$

L'aire du triangle SBC est donc $\sqrt{5}$ (cm^2).

3. Calculons le volume de la pyramide OCBS en prenant le triangle SBC comme base. La hauteur associée sera donc le segment [OH] car H est le projeté orthogonal de O sur le plan (SBC).

On a donc : $V_{\text{OCBS}} = \dfrac{1}{3} \times \sqrt{5} \times \text{OH}$

Or, d'après la question **1. b.** de la **Partie C**, $V_{\text{OCBS}} = \dfrac{2}{3}$ (cm^3).

Donc $\dfrac{2}{3} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}\text{OH} \iff \text{OH} = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{3}{\sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}}x = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Donc la distance du point O au plan (SBC), c'est-à-dire la distance de O à son projeté orthogonal sur (SBC), est bien égale à $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ (cm).

Cela confirme bien le résultat de la **Partie B**.

EXERCICE 4 — 5 points

1. De ce que l'on voit de la courbe, la fonction est manifestement convexe d'abord, puis concave. Comme la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A semble traverser la courbe au point de tangence, on peut émettre la conjecture que la fonction f est convexe sur $]-\infty\,;\,1]$ et concave sur $[1\,;\,+\infty[$.

2. On a : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+1 = +\infty\\ \lim\limits_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty\end{cases}$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(x^2+1) = +\infty$.

De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} -3x = +\infty$

Donc par produit et somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

3. a. Soit x un réel strictement positif.

$$\begin{aligned}
f(x) &= 5\ln\left(x^2+1\right)-3x\\
&= 5\ln\left(x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right)-3x\\
&= 5\ln\left(x^2\right)+5\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)-3x \quad \text{par propriété de la fonction ln.}\\
&= 5\times 2\ln(x)-3x+5\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\\
&= x\left(10\frac{\ln x}{x}-3\right)+5\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)
\end{aligned}$$

On a donc bien : pour tout x réel strictement positif, $\quad f(x)=x\left(10\dfrac{\ln x}{x}-3\right)+5\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$.

b. On va utiliser la forme établie à la question précédente pour lever l'indétermination :

- D'une part :

  D'après la propriété des croissances comparées, $\quad \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$.

  Donc par produit et somme, $\quad \lim\limits_{x\to+\infty}10\dfrac{\ln(x)}{x}-3=-3$.

  De plus $\quad \lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty \quad$ donc par produit, $\quad \lim\limits_{x\to+\infty}x\left(10\dfrac{\ln x}{x}-3\right)=-\infty$.

- D'autre part : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}1+\dfrac{1}{x^2}=1\\ \lim\limits_{X\to 1}\ln(X)=0\end{cases}$ par composition, $\quad \lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)=0$

  Par produit on a donc $\lim\limits_{x\to+\infty}5\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)=0$.

Finalement, par somme, $\quad \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.

4. a. Pour déterminer l'expression de la fonction dérivée de f, on va revenir à l'expression de départ de $f(x)$, plus simple que celle obtenue à la question **3. a.**.

On a admis que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Si on pose : $\begin{cases}u : x\longmapsto x^2+1\\ u' : x\longmapsto 2x\end{cases}$ on a $\quad \forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=5\ln\left(u(x)\right)-3x$.

Ainsi, on a : $\quad \forall x\in\mathbb{R},\quad$
$$\begin{aligned}
f'(x) &= 5\frac{u'(x)}{u(x)}-3\\
&= 5\frac{2x}{x^2+1}-3\\
&= \frac{10x}{x^2+1}+\frac{-3\left(x^2+1\right)}{x^2+1}\\
&= \frac{10x-3x^2-3}{x^2+1}\\
&= \frac{-3x^2+10x-3}{x^2+1}
\end{aligned}$$

On arrive bien à l'expression attendue.

b. Pour tout x réel, l'expression $\quad x^2+1 \quad$ est supérieure à 1, et donc strictement positive.

Le signe de $f'(x)$ est donc celui du trinôme : $\quad -3x^2+10x-3$.

Ce trinôme a un coefficient dominant égal à -3, donc négatif. Cela signifie que toutes les images $\quad -3x^2+10x-3 \quad$ sont négatives, sauf pour les valeurs x comprises entre d'éventuelles racines.

Le discriminant du trinôme est : $\quad \Delta=10^2-4\times(-3)\times(-3)=100-36=64=8^2$.

Comme il est strictement positif, le trinôme admet deux racines réelles distinctes :

$x_1=\dfrac{-10-8}{2\times(-3)}=3 \quad$ et $\quad x_2=\dfrac{-10+8}{2\times(-3)}=\dfrac{1}{3}$.

On peut donc établir le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		3		$+\infty$
signe de $-3x^2+10x-3$		$-$	0	$+$	0	$-$	
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On a donc une fonction f qui est strictement décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty\,;\,\frac{1}{3}\right]$, ainsi que sur l'intervalle $[3\,;\,+\infty[$ et strictement croissante sur l'intervalle $\left[\frac{1}{3}\,;\,3\right]$.

Ceci est cohérent avec la courbe tracée sur le sujet.

5. a. Puisque l'expression de la fonction dérivée seconde est donnée, on va pouvoir utiliser ce résultat.

Le dénominateur $\left(x^2+1\right)^2$ est à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$, en tant que carré d'un réel lui-même strictement positif.

$f''(x)$ a donc le même signe que son numérateur :

$-10x^2+10 = 10(1-x^2) = 10(1-x)(1+x)$.

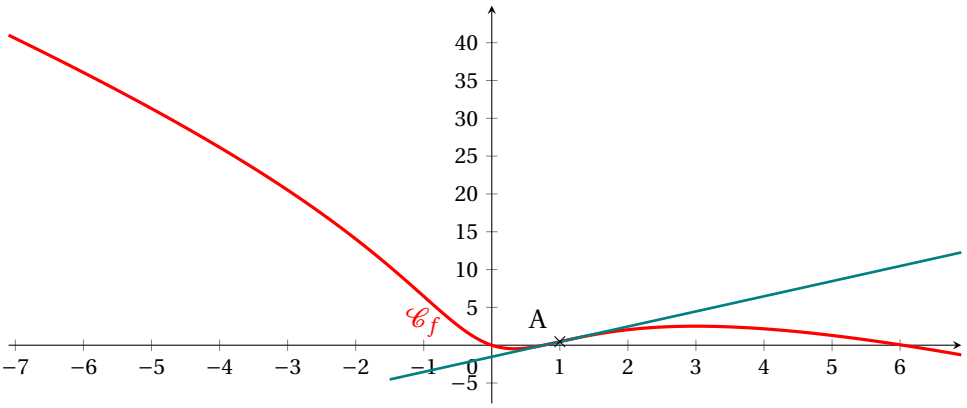
Le numérateur est donc une expression polynomiale de degré 2, dont le coefficient dominant est négatif, et ayant deux racines évidentes : 1 et -1.

On peut donc établir le tableau de signe de $f''(x)$:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
signe de $f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

f est donc convexe sur $[-1;1]$, et concave sur $]-\infty;-1]$ ainsi que sur $[1;+\infty[$, avec deux points d'inflexion, à l'abscisse -1 et à l'abscisse 1(c'est le point A).

Cela permet donc de rejeter la conjecture formulée à la question **1.**. Cette conjecture est faussée par l'échelle choisie pour la représentation de f. Ci-après, avec une échelle qui permet d'observer les images pour des abscisses inférieures à -1, la concavité de cette zone devient apparente :



b. L'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 1 est donnée par la formule classique : $y = f'(1)\times\left(x-1\right)+f(1)$.

Avec : $f(1) = 5\ln(1^2+1)-3\times 1 = 5\ln(2)-3$;

et : $f'(1) = \dfrac{-3\times 1^2+10\times 1-3}{1^2+1} = \dfrac{4}{2} = 2$;

On arrive à : $y = 2\left(x-1\right)+5\ln(2)-3$ soit $y = 2x+5\ln(2)-5$.

c. On nous demande d'établir une inégalité pour $x \geqslant 1$.

Sur $[1\,;\,+\infty[$, on a établi à la question **5. a.** que la fonction est concave.

Graphiquement, cela se traduit par le fait que la courbe représentative de f est en dessous de toutes ses tangentes sur cet intervalle, notamment en dessous de celle au point d'abscisse 1, dont on vient de déterminer l'équation.

On peut donc affirmer : $f(x) \leqslant 2x+5\ln(2)-5 \iff 5\ln\left(x^2+1\right)-3x \leqslant 2x+5\ln(2)-5$

$\iff 5\ln\left(x^2+1\right) \leqslant 3x+2x+5\ln(2)-5$

$\iff 5\ln\left(x^2+1\right) \leqslant 5x+5\ln(2)-5$

$\iff 5\ln\left(x^2+1\right) \leqslant 5\left(x+\ln(2)-1\right)$

$\iff \ln\left(x^2+1\right) \leqslant x+\ln(2)-1$ car $5>0$

On établit donc ainsi l'inégalité demandée.

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.