Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du Bac Général Maths + LLCER, veuillez visiter :
bac-maths-llcer.fr/annales-sujets-et-corriges

Baccalauréat épreuve de spécialité

Corrigé du sujet 1

Voie générale – Métropole – 16 juin 2026

A. P. M. E. P.

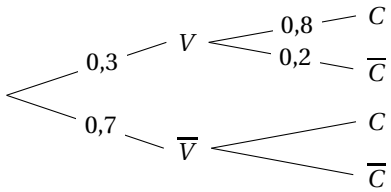
Exercice 1 (5 points)

Partie A

1. **a.** Comme on choisit au hasard une famille, on est en situation d'équiprobabilité, et les proportions sont assimilables à des probabilités.

Comme 75 % des familles réservent une cabine, cela se traduit par : $P(C) = 0{,}75$.

b. Voici l'arbre complété avec les valeurs disponibles dans l'énoncé, et les probabilité des événements contraires donnés dans l'énoncé :



2. La probabilité qu'une famille réserve un emplacement pour un véhicule et une cabine est :
$P(V \cap C) = P(V) \times P_V(C) = 0{,}3 \times 0{,}8 = 0{,}24$.

3. La probabilité qu'une famille réserve un emplacement pour un véhicule, sachant qu'elle a réservé une cabine est : $P_C(V)$.

$P_C(V) = \dfrac{P(C \cap V)}{P(C)} = \dfrac{0{,}24}{0{,}75} = \dfrac{24}{75} = 0{,}32$.

4. Les évènements V et $\overline{V}$ forment une partition de l'univers.

D'après la loi des probabilités totales, on en déduit :

$P\big(C\big) = P\big(C \cap V\big) + P\big(C \cap \overline{V}\big) \iff P\big(C \cap \overline{V}\big) = P\big(C\big) - P\big(C \cap V\big)$.

En remplaçant par les valeurs connues : $P\big(C \cap \overline{V}\big) = 0{,}75 - 0{,}24 = 0{,}51$.

Finalement, en revenant à la question posée : $P_{\overline{V}}(C) = \dfrac{P\big(\overline{V} \cap C\big)}{P\big(\overline{V}\big)} = \dfrac{0{,}51}{0{,}7} = \dfrac{51}{70} \approx 0{,}729$

$P_{\overline{V}}(C) \approx 0{,}73$ à 10^{-2} près.

Dans le contexte de l'exercice, cela signifie qu'environ 73 % des familles n'ayant pas réservé d'emplacement pour un véhicule ont réservé une cabine.

Partie B

1. On va donner les calculs pour l'espérance et la variance de X :

$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) &= x_1 \times P(X = x_1) + x_2 \times P(X = x_2) + x_3 \times P(X = x_3) + x_4 \times P(X = x_4)\\ &= 0 \times 0{,}19 + 70 \times 0{,}06 + 100 \times 0{,}51 + 170 \times 0{,}24\\ &= 0 + 4{,}2 + 51 + 40{,}8 = 96.\end{aligned}$

$\begin{aligned}\mathrm{V}(X) &= \big(x_1 - \mathrm{E}(X)\big)^2 \times P(X = x_1) + \big(x_2 - \mathrm{E}(X)\big)^2 \times P(X = x_2) + \cdots + \big(x_4 - \mathrm{E}(X)\big)^2 \times P(X = x_4)\\ &= (0 - 96)^2 \times 0{,}19 + (70 - 96)^2 \times 0{,}06 + (100 - 96)^2 \times 0{,}51 + (170 - 96)^2 \times 0{,}24\\ &= 1\,751{,}04 + 40{,}56 + 8{,}16 + 1\,314{,}24 = 3\,114\end{aligned}$

On trouve bien les deux valeurs annoncées dans l'énoncé.

2. **a.** $X + Y$ est la variable aléatoire qui donne la somme du prix des suppléments et du prix des extras, sans réduction.

Comme la compagnie propose une remise de 40 % sur ces extras et suppléments, cela signifie que les familles vont payer un prix qui aura été multiplié par : $1 - \dfrac{40}{100} = 0{,}6$

Ainsi, la variable aléatoire donnant le montant total des suppléments et extras, après réduction est bien : $Z = 0{,}6(X+Y)$.

b. Par linéarité de l'espérance : $\mathrm{E}(Z) = 0{,}6\big(\mathrm{E}(X)+\mathrm{E}(Y)\big) = 0{,}6\big(96+104\big) = 0{,}6\times 200 = 120$

Comme les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, on a : $\mathrm{V}(X+Y) = \mathrm{V}(X)+\mathrm{V}(Y)$.

Par propriété de la variance :

$\mathrm{V}(Z) = 0{,}6^2\times \mathrm{V}(X+Y) = 0{,}36\big(\mathrm{V}(X)+\mathrm{V}(Y)\big) = 0{,}36\times(3\,114+1\,686) = 0{,}36\times 4\,800 = 1\,728$.

3. a. M_n est la moyenne empirique de l'échantillon de taille n.

Par linéarité de l'espérance, on a :

$$\mathrm{E}\big(M_n\big) = \frac{1}{n}\big(\mathrm{E}(Z_1)+\mathrm{E}(Z_2)+\cdots+\mathrm{E}(Z_n)\big) = \frac{1}{n}\big(120+120+\cdots+120\big) = \frac{120n}{n} = 120.$$

Comme les variables aléatoires sont indépendantes :

$$\mathrm{V}\big(M_n\big) = \left(\frac{1}{n}\right)^2\times\big(\mathrm{V}(Z_1)+\mathrm{V}(Z_2)+\cdots+\mathrm{V}(Z_n)\big) = \frac{1}{n^2}\big(1\,728+1\,728+\cdots+1\,728\big) = \frac{1\,728n}{n^2} = \frac{1\,728}{n}.$$

Remarque : en disant explicitement que M_n est la moyenne empirique d'un échantillon de taille n de variables aléatoires indépendantes suivant la loi de probabilité de Z, on peut aussi dire, par propriété que : $\mathrm{E}\big(M_n\big) = \mathrm{E}(Z) = 120$ et $\mathrm{V}\big(M_n\big) = \dfrac{\mathrm{V}(Z)}{n} = \dfrac{1\,728}{n}$.

b. On a :
$$\begin{aligned} P\big(114 < M_n < 126\big) &= P\big(114-120 < M_n-120 < 126-120\big)\\ &= P\big(-6 < M_n-\mathrm{E}(M_n) < 6\big) \quad \text{car } \mathrm{E}(M_n) = 120\\ &= P\big(\big|M_n-\mathrm{E}(M_n)\big| < 6\big)\\ &= 1-P\big(\big|M_n-\mathrm{E}(M_n)\big| \geqslant 6\big) \quad \text{via l'évènement contraire}\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour tout réel t strictement positif :

$$P\big(\big|M_n-\mathrm{E}(M_n)\big| \geqslant t\big) \leqslant \frac{\mathrm{V}(M_n)}{t^2}.$$

Notamment, pour $t = 6$:

$$P\big(\big|M_n-\mathrm{E}(M_n)\big| \geqslant 6\big) \leqslant \frac{\dfrac{1\,728}{n}}{6^2}.$$

Or : $\dfrac{\dfrac{1\,728}{n}}{6^2} = \dfrac{1\,728}{36n} = \dfrac{48}{n}$.

On a donc : $P\big(\big|M_n-\mathrm{E}(M_n)\big| \geqslant 6\big) \leqslant \dfrac{48}{n} \iff 1-P\big(\big|M_n-\mathrm{E}(M_n)\big| \geqslant 6\big) \geqslant 1-\dfrac{48}{n}$

$$\iff P\big(114 < M_n < 126\big) \geqslant 1-\frac{48}{n}$$

Ainsi, $1-\dfrac{48}{n} \geqslant 0{,}85 \implies \mathrm{P}\big(114 < M_n < 126\big) \geqslant 0{,}85$.

Résolvons : $1-\dfrac{48}{n} \geqslant 0{,}85 \iff 0{,}15 \geqslant \dfrac{48}{n}$

$$\begin{aligned} &\iff 0{,}15n \geqslant 48 \quad \text{car } n\in\mathbb{N}^* \quad \text{donc } n > 0\\ &\iff n \geqslant \frac{48}{0{,}15} \quad \text{car } 0{,}15 > 0\\ &\iff n \geqslant 320\end{aligned}$$

Les solutions de cette inéquation sont les entiers supérieurs ou égaux à 320.

Le plus petit entier permettant d'affirmer $\mathrm{P}\big(114 < M_n < 126\big) \geqslant 0{,}85$ est donc 320.

Dans le contexte de l'exercice, cela signifie que l'affirmation « le coût moyen payé par les familles pour les suppléments et extras, après réduction de 40 % est strictement compris entre 114 et 126 euros » est vraie au risque de 15 % (ou avec une confiance de 85 %) à partir de 320 familles à bord du bateau.

Exercice 2 (4 points)

1. a. Affirmation 1 : Vraie.

Par lecture de l'équation cartésienne du plan on peut affirmer que $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\1\\-5\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $(\mathscr{P})$.

La droite (AB) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{\text{AB}}$, de coordonnées : $\begin{pmatrix}x_\text{B}-x_\text{A}\\y_\text{B}-y_\text{A}\\z_\text{B}-z_\text{A}\end{pmatrix}$

soit : $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix}2-3\\1-0\\3-2\end{pmatrix}$ et donc : $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix}-1\\1\\-5\end{pmatrix}$.

Comme $\overrightarrow{\text{AB}}=\vec{n}$, le vecteur directeur de la droite (AB) est donc normal au plan $(\mathscr{P})$.
Par définition, la droite (AB) est donc orthogonale au plan $\mathscr{P}$.
Le milieu du segment [AB] est le point I, et ses coordonnées vérifient :
$\text{I}\left(\dfrac{x_\text{A}+x_\text{B}}{2};\dfrac{y_\text{A}+y_\text{B}}{2};\dfrac{z_\text{A}+z_\text{B}}{2}\right)$ soit $\text{I}\left(\dfrac{3+2}{2};\dfrac{0+1}{2};\dfrac{2-3}{2}\right)$ et finalement $\text{I}(2{,}5\,;0{,}5\,;-0{,}5)$.
Vérifions si les coordonnées de I vérifient l'équation du plan $(\mathscr{P})$:
$-x_\text{I}+y_\text{I}-5z_\text{I}-0{,}5=-2{,}5+0{,}5-5\times(-0{,}5)-0{,}5=-2{,}5+0{,}5+2{,}5-0{,}5=0$
I est donc un point du plan $(\mathscr{P})$.
Le plan $(\mathscr{P})$ est bien orthogonal à la droite (AB), et passe par le milieu du segment [AB] (autrement dit, c'est le plan médiateur du segment [AB]).

b. Affirmation 2 : Fausse.

La droite (AB) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix}-1\\1\\-5\end{pmatrix}$.

Par lecture de sa représentation paramétrique, on peut dire que (d) est dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$.

Les deux vecteurs ont des coordonnées clairement non proportionnelles, donc ils ne sont pas colinéaires.
Les droites (AB) et (d) ne sont donc pas parallèles (ni strictement, ni confondues).
Elles peuvent donc être sécantes, ou non coplanaires.
Pour trancher, cherchons à établir si elles ont un point commun.

Une représentation paramétrique de (AB) est : $\begin{cases}x=x_\text{A}+x_{\overrightarrow{\text{AB}}}\times s\\y=y_\text{A}+y_{\overrightarrow{\text{AB}}}\times s\\z=z_\text{A}+z_{\overrightarrow{\text{AB}}}\times s\end{cases}$ où $s\in\mathbb{R}$

Soit, en remplaçant par les valeurs connues : $\begin{cases}x=3-s\\y=s\\z=2-5s\end{cases}$ où $s\in\mathbb{R}$

Le point de paramètre t sur (d) est confondu avec le point de paramètre s sur (AB) si et seulement si $(s\,;t)$ est solution du système :

$$\begin{cases}3-s=t\\s=-1{,}5-t\\2-5s=2-2t\end{cases}\iff\begin{cases}3-s=t\\s=-1{,}5-(3-s)\\2-5s=2-2(3-s)\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}3-s=t\\s=-1{,}5-3+s\\2-5s=2-6+2s\end{cases}$$

Les équations du système sont incompatibles (la deuxième équation est équivaut à $0=-4{,}5$).

Le système n'a pas de solution.

Il n'y a donc aucun point commun entre les droites (AB) et (d), qui sont donc non coplanaires, et pas sécantes.

c. Affirmation 3 : Vraie

On a : $\overrightarrow{\text{CA}}\begin{pmatrix}1,5\\3\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{CB}}\begin{pmatrix}0,5\\4\\-2\end{pmatrix}$.

Comme ce sont des coordonnées dans un repère orthonormé, on utilise la formule analytique du produit scalaire : $\overrightarrow{\text{CA}}\cdot\overrightarrow{\text{CB}} = 1,5\times 0,5+3\times 4+3\times(-2) = 0,75+12-6 = 6,75$.

Par ailleurs, on peut calculer les longueurs CA et CB :

$\text{CA} = \sqrt{1,5^2+3^2+3^2} = \sqrt{20,25} = 4,5$. $\text{CB} = \sqrt{0,5^2+4^2+(-2)^2} = \sqrt{20,25} = 4,5$.

On remarque donc (même si c'est hors sujet) que le triangle ACB est isocèle en C.

En utilisant la définition trigonométrique du produit scalaire, on a :

$\overrightarrow{\text{CA}}\cdot\overrightarrow{\text{CB}} = \text{CA}\times\text{CB}\times\cos\left(\widehat{\text{ACB}}\right)$.

En remplaçant les valeurs connues, on a : $6,75 = 4,5\times 4,5\times\cos\left(\widehat{\text{ACB}}\right)$,

ce qui équivaut à $\cos\left(\widehat{\text{ACB}}\right) = \dfrac{6,75}{4,5^2} = \dfrac{1}{3}$.

On en déduit : $\widehat{\text{ACB}} = \arccos\left(\dfrac{1}{3}\right) \approx 70,53\,°$.

On a donc bien $\widehat{\text{ACB}} \approx 70,5\,°$, à 10^{-1} près.

2. Affirmation 4 : Vraie.

- Titouan doit, pour ouvrir sa porte, trouver les quatre symboles différents de son code, et les saisir dans un ordre quelconque.

  Il s'agit donc d'une combinaison (pas de répétition des éléments, l'ordre ne compte pas) de quatre éléments, dans un ensemble de cardinal 8 (huit symboles sur le digicode).

  $\binom{8}{4} = 70$.

  Titouan a donc 70 codes différents possibles, chacun ayant donc une probabilité de $\dfrac{1}{70}$, puisque tous les choix des codes sont équiprobables.
- Clotilde, elle, doit saisir trois symboles différents, mais en tenant compte de l'ordre.

  Il s'agit donc d'un arrangement (pas de répétition, l'ordre compte) de trois éléments dans un ensemble de cardinal 8.

  $\dfrac{8!}{(8-3)!} = \dfrac{8!}{5!} = 8\times 7\times 6 = 336$.

  Clotilde a donc 336 codes différents possibles, tous ayant une probabilité de $\dfrac{1}{336}$.

Comme $\dfrac{1}{70} > \dfrac{1}{336}$ la probabilité que Titouan ouvre sa porte est bien supérieur à la probabilité que Clotilde ouvre la sienne.

Exercice 3 (6 points)

Partie A : Phase de chauffage

1. On a une équation différentielle de la forme $y' = ay + b$, où a et b sont des réels non nuls.

La solution particulière constante de l'équation (E) est : $t \longmapsto \dfrac{-b}{a}$.

Or $\dfrac{-0{,}91}{-0{,}035} = 26$.

La solution particulière constante de (E) sur $[0\,;+\infty[$ est donc : $t \longmapsto 26$.

Par propriété, les solutions générales de (E) sur $[0\,;+\infty[$ sont de la forme : $t \longmapsto C\,\mathrm{e}^{-0{,}035t} + 26$, où C est un réel quelconque.

2. La fonction T est donc une de ces solutions, donc on connaît sa forme générale, établie ci-avant.

Pour déterminer la constante C, on va utiliser la condition initiale : $T(0) = 18$.

$$\begin{aligned} T(0) = 18 &\iff C\,\mathrm{e}^{-0{,}035\times 0} + 26 = 18 \\ &\iff C\,\mathrm{e}^{0} = 18 - 26 \\ &\iff C \times 1 = -8 \\ &\iff C = -8 \end{aligned}$$

Cela confirme bien que, pour tout nombre réel t appartenant à l'intervalle $[0\,;+\infty[$, on a :

$$T(t) = 26 - 8\,\mathrm{e}^{-0{,}035t}.$$

3. Selon ce modèle, le temps au bout duquel la pièce atteindra la température de 20 °C est la solution de l'équation : $T(t) = 20$.

Résolvons cette équation :

$$\begin{aligned} T(t) = 20 &\iff 26 - 8\,\mathrm{e}^{-0{,}035t} = 20 \\ &\iff -8\,\mathrm{e}^{-0{,}035t} = -6 \\ &\iff \mathrm{e}^{-0{,}035t} = 0{,}75 \\ &\iff -0{,}035t = \ln(0{,}75) \\ &\iff t = \frac{\ln(0{,}75)}{-0{,}035} \end{aligned}$$

$\dfrac{\ln(0{,}75)}{-0{,}035} \approx 8{,}22$.

Le temps est exprimé en dizaine de minutes. 8,22 dizaines de minutes, correspondent, à la minute près à 82 minutes, soit 1 heure et 22 minutes.

À la minute près, il faut donc 1 heure et 22 minutes pour que la température atteigne les 20 °C.

4. Pour les équations différentielles de la forme $y' = ay + b$ avec un coefficient a strictement négatif (ce qui est le cas ici, $a = -0{,}035$), on sait par propriété que les courbes de fonctions vont admettre comme asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$ la droite représentant la solution particulière constante, soit ici la droite d'équation $y = 26$.

De plus, on sait aussi que les solutions sont strictement monotones.

Or, ici, on a $T(0) = 18 < \lim\limits_{t\to+\infty} T(t) = 26$

donc la fonction T est strictement monotone et ne peut pas être décroissante : elle est croissante (logique, en phase de chauffage, la température monte).

T est donc une fonction strictement croissante, tendant vers 26 : elle est donc majorée par 26.

Si une panne du système de chauffage l'empêche de s'éteindre lorsque la température de la pièce atteint 20 °C, la température de la pièce ne pourra donc pas dépasser 26 °C, et donc encore moins 28 °C.

Remarque : On peut aussi, plus simplement dire que la fonction exponentielle est à valeurs strictement positives et donc, pour tout réel t positif :

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-0{,}035t} > 0 &\implies -8\,\mathrm{e}^{-0{,}035t} < 0 \quad \text{car } -8 < 0 \\ &\implies 26 - 8\,\mathrm{e}^{-0{,}035t} < 26 \\ &\implies T(t) < 26 \end{aligned}$$

Et donc la température est majorée par 26 °C, ce qui permet de conclure aussi.

Partie B : Phase de refroidissement

1. D'après la relation de récurrence, appliquée avec $n = 0$:

$u_1 = u_{0+1} = 0{,}965u_0 + 0{,}35 + 0{,}07\,\mathrm{e}^{-0{,}1\times 0} = 0{,}965 \times 20 + 0{,}35 + 0{,}07 \times 1 = 19{,}3 + 0{,}35 + 0{,}07 = 19{,}72.$

2. Pour tout entier naturel n, on pose P_n l'affirmation : « $u_n > 10$ ».

- **Initialisation :** Pour $n = 0$, on a $u_0 = 20 > 10$.
  L'affirmation P_0 est vraie.
- **Hérédité :** soit n un entier naturel ($n \geqslant 0$), on suppose que pour cet entier n, l'affirmation P_n est vraie.

$$\begin{aligned}
P_n \text{ est vraie} &\Longrightarrow u_n > 10\\
&\Longrightarrow 0{,}965u_n > 9{,}65 \quad \text{car} \quad 0{,}965 > 0\\
&\Longrightarrow 0{,}965u_n + 0{,}35 > 9{,}65 + 0{,}35\\
&\Longrightarrow 0{,}965u_n + 0{,}35 > 10\\
&\Longrightarrow 0{,}965u_n + 0{,}35 + 0{,}07\,\mathrm{e}^{-0{,}1n} > 10 \quad \text{car} \quad 0{,}07\,\mathrm{e}^{-0{,}1n} > 0\\
&\Longrightarrow u_{n+1} > 10\\
&\Longrightarrow P_{n+1} \text{ est vraie}
\end{aligned}$$

- **Conclusion :** la propriété P_0 est vraie, et pour n entier naturel, elle est héréditaire, donc par principe de récurrence :
  Pour tout entier naturel n, P_n est vraie, c'est-à-dire : $u_n > 10$.

Autrement dit la suite (u_n) est strictement minorée par 10.

3. La suite est décroissante (admis) et minorée par 10, donc d'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) est convergente vers une limite supérieure ou égale à 10, notée ℓ.

4. **a.** On a donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

La suite de terme général (u_{n+1}), avec les mêmes termes, mais décalés d'un rang, aura la même limite ℓ.

Mais comme pour tout n naturel, on a : $u_{n+1} = 0{,}965u_n + 0{,}35 + 0{,}07\,\mathrm{e}^{-0{,}1n}$, on a aussi :

- Par limite du produit et de la somme : $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}965u_n + 0{,}35 = 0{,}965\ell + 0{,}35$;
- $\lim\limits_{n\to+\infty} -0{,}1n = -\infty$ et donc, par composition : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-0{,}1n} = \lim\limits_{y\to-\infty} \mathrm{e}^{y} = 0$;

Ainsi, par limite de la somme : $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}965u_n + 0{,}35 + 0{,}07\,\mathrm{e}^{-0{,}1n} = 0{,}965\ell + 0{,}35$.

Soit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = 0{,}965\ell + 0{,}35$.

Or on a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$.

Par unicité de la limite, on doit donc avoir : $\ell = 0{,}965\ell + 0{,}35$.

La limite ℓ est donc solution de l'équation $x = 0{,}965x + 0{,}35$.

Remarque : ici, on a l'esprit du théorème du point fixe, mais on ne peut pas l'appliquer directement, car la relation de récurrence de la suite (u_n) fait intervenir à la fois le terme précédent, mais aussi son indice.

Il n'y a donc pas une fonction f unique qui permettrait d'écrire $u_{n+1} = f(u_n)$, cette fonction dépendant aussi de n.

b. Résolvons l'équation : $x = 0{,}965x + 0{,}35$

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow x - 0{,}965x = 0{,}35\\
&\Longleftrightarrow 0{,}035x = 0{,}35\\
&\Longleftrightarrow x = \frac{0{,}35}{0{,}035}\\
&\Longleftrightarrow x = 10
\end{aligned}$$

L'équation n'a qu'une solution, 10, donc la suite tend vers 10.

Dans le contexte de l'exercice, cela signifie qu'avec une durée sans chauffage très longue, la température de la pièce se rapproche de et se stabilise aux environs de 10 °C.

5. **a.** Le programme va utiliser la variable `n` pour stocker les indices et `u` pour stocker le terme correspondant de la suite (u_n).

Tant que le terme est supérieur strictement à 18, alors la température ne nécessite pas de remettre en route le chauffage, et donc on calcule le terme et l'indice suivant.

Cela donne :

```
1.  def marche() :
2.    n = 0
3.    u = 20
4.    while u > 18 :
5.      u = 0.965*u+0.35 + 0.07*exp(-0.1*n)
6.      n = n+1
7.    return n
```

Remarque : pour que ce programme fonctionne, il faut d'abord invoquer la fonction exponentielle, fournie par la librairie `math`, avec la ligne `from math import exp`.

b. On explore à la calculatrice les premiers termes de la suite.

On constate que $u_8 \approx 17{,}87$ quand les termes précédents sont tous strictement supérieurs à 18.

La fonction va renvoyer 8, donc il faudra huit dizaines de minutes (arrondi par excès) pour que le système de chauffage se remettra en marche.

Exercice 4 (5 points)

Partie A

1. D'après l'énoncé, le point A(0 ; 1) est sur la courbe représentative de f.

On a donc : $f(0) = 1 \iff a + \dfrac{b\ln(0+1)}{0+1} = 1$

$\iff a + \dfrac{b\ln(1)}{1} = 1$

$\iff a = 1 \quad \text{car } \ln(1) = 0$

On a donc bien $a = 1$.

2. **a.** La valeur de $f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 0, c'est-à-dire de la tangente T_A.

Cette tangente passe par A et par B(1 ; 5).

Son coefficient directeur est donc : $\dfrac{5-1}{1-0} = 4$.

On a donc $f'(0) = 4$.

b. Sur l'intervalle [0 ; 2], au moins, la fonction f est manifestement concave.

Ainsi, on aura f'' à valeurs négatives sur au moins [0 ; 2].

Notamment, on a $f''(1)$ négatif.

3. **a.** f est dérivable sur son ensemble de définition.

Soit x appartenant à $]-1 ; +\infty[$:

On peut dire que : $x \longmapsto \ln(x+1)$ a pour dérivée, par composition : $x \longmapsto \dfrac{1}{x+1}$.

Ainsi pour x appartenant à $]-1 ; +\infty[$:

$$f'(x) = 0 + \frac{b \times \dfrac{1}{x+1} \times (x+1) - 1 \times b\ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{b - b\ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{b\big(1 - \ln(x+1)\big)}{(x+1)^2}$$

b. D'après la question **2. a.**, on a $f'(0) = 4$.

$$f'(0)=4 \iff \frac{b\big(1-\ln(0+1)\big)}{(0+1)^2}=4$$
$$\iff \frac{b\big(1-\ln(1)\big)}{1^2}=4$$
$$\iff b(1-0)=4$$
$$\iff b=4$$

On en déduit que $b=4$.

Partie B

1. D'après la propriété des croissances comparées : $\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{\ln(y)}{y}=0$.

Or : $\lim\limits_{x\to+\infty} x+1=+\infty$ donc, avec $y=x+1$, par composition, on en déduit : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}=0$.

Par limite de la somme et du produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 1+4\times\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}=1+4\times 0=1$.

f a une limite finie égale à 1, quand x tend vers $+\infty$.

Par définition, la droite d'équation $y=1$ est asymptote à la courbe représentative de la fonction f au voisinage de $+\infty$.

2. Résolvons : $1-\ln(x+1)>0 \iff 1>\ln(x+1)$

$$\iff \mathrm{e}^1>x+1 \quad \text{car la fonction exp est strictement croissante sur } \mathbb{R}$$
$$\iff \mathrm{e}-1>x$$

Sur $]-1\,;+\infty[$, l'ensemble des solutions de l'équation est $]-1\,;\mathrm{e}-1[$.

3. On a les limites de f aux bornes de son ensemble de définition, l'une calculée à la question **1.**, l'autre admise.

D'après la question **3. a.** de la **partie A**, on a, pour tout x réel strictement supérieur à 1 :

$f'(x)=\dfrac{4\big(1-\ln(x+1)\big)}{(x+1)^2}=\dfrac{4}{(x+1)^2}\times\big(1-\ln(x+1)\big)$.

Or : $\forall x\in]-1\,;+\infty[,\quad \dfrac{4}{(x+1)^2}>0$

Pour tout x strictement supérieur à 1, le signe du nombre dérivé $f'(x)$ est donc donné par le signe de l'expression $1-\ln(x+1)$.

On a établi ce signe à la question précédente.

Le changement de variations de f interviendra donc pour $x=\mathrm{e}-1$.

$f(\mathrm{e}-1)=1+\dfrac{4\ln(\mathrm{e}-1+1)}{\mathrm{e}-1+1}=1+\dfrac{4\ln(\mathrm{e})}{\mathrm{e}}=1+\dfrac{4}{\mathrm{e}}=1+4\mathrm{e}^{-1}$.

On a donc le tableau de variation complet de la fonction f :

x	-1		$\mathrm{e}-1$		$+\infty$
signe de $f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
variations de f	‖ $-\infty$	↗	$1+4\mathrm{e}^{-1}$	↘	1

4. e est inférieur à 3, donc $\mathrm{e}-1$ est inférieur à 2 (on a : $\mathrm{e}-1\approx 1{,}72$).

Sur l'intervalle $[2\,;+\infty[$, f est continue (car dérivable) et strictement décroissante.

De plus 1,5 est une valeur intermédiaire entre $f(2)=1+\dfrac{4\ln(3)}{3}\approx 2{,}46$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$.

D'après le corollaire au théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones (dit aussi théorème de la bijection), l'équation $f(x) = 1{,}5$ admet une unique solution dans l'intervalle $[2\,;+\infty[$.

À la calculatrice, on obtient 25,1 comme valeur approchée arrondie à 10^{-1} de cette solution.

5. **a.** Posons u définie sur $]-1\,;+\infty[$ par : $u : x \longmapsto \ln(x+1)$.

On a : $u' : x \longmapsto \dfrac{1}{x+1}$.

On reconnaît donc, pour tout x dans $[0\,;2]$: $\dfrac{\ln(x+1)}{x+1} = \ln(x+1) \times \dfrac{1}{x+1} = u(x) \times u'(x)$.

On en déduit : $\displaystyle\int_0^2 \frac{\ln(x+1)}{x+1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\big(\ln(x+1)\big)^2\right]_0^2$

$$= \left(\frac{1}{2}\big(\ln(2+1)\big)^2\right) - \left(\frac{1}{2}\big(\ln(0+1)\big)^2\right)$$
$$= \frac{1}{2}\big(\ln 3\big)^2 - \frac{1}{2}\big(\ln 1\big)^2$$
$$= \frac{1}{2}\big(\ln 3\big)^2 \quad \text{car } \ln(1) = 0$$

b. Comme la fonction f est une fonction continue et positive sur $[0\,;2]$, l'aire, en unité d'aire, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction f, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 2$ correspond à : $\mathscr{A} = \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

$$\mathscr{A} = \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \left(1 + \frac{4\ln(x+1)}{x+1}\right)\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^2 1\,\mathrm{d}x + 4\int_0^2 \frac{\ln(x+1)}{x+1}\,\mathrm{d}x \quad \text{par linéarité de l'intégrale}$$
$$= 2 + 4 \times \frac{1}{2}\big(\ln 3\big)^2 \quad \text{d'après la question précédente}$$
$$= 2 + 2\big(\ln 3\big)^2$$

En unité d'aire, l'aire demandée est donc $2 + 2\big(\ln 3\big)^2$

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.